ИМИТАЦИЯ ДИНАМИКИ ЦЕН БИРЖЕВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ ЦЕН С УСТОЙЧИВЫМИ ШАГАМИ

Д. Ю. Чукин, И. В. Трегуб (Москва)

Модели случайного блуждания для имитации динамики цен биржевых инструментов применяются достаточно давно. Стандартными предположениями в данном случае являются стационарность шагов модели и эффективность рынка, которая подразумевает независимость изменений цен, а значит, стремящееся к нормальному распределение суммы достаточно большого их количества. Однако на практике такие предположения часто оказываются несправедливыми, вследствие чего применение модели случайного блуждания дает неоднозначные результаты [1]. Реальное распределение цен имеет более высокий «пик» и тяжелые «хвосты».

Существенно повысить прогнозное качество модели можно, если предположить, что изменение цены имеет бесконечную дисперсию. В таком случае распределение суммы изменений цен будет стремиться к устойчивому распределению – семейству 4-параметрических распределений, членом которого, к слову, является и нормальное.

Единственной проблемой использования устойчивых распределений является отсутствие функции плотности распределения в явном виде, что делает применение методов имитационного моделирования наиболее приемлемым инструментом для описания динамики цен с устойчивыми изменениями.

Новизна работы заключается в использовании устойчивых распределений для имитации динамики цен биржевых инструментов и получении на основании этого абсолютно новых эмпирических результатов.

Имитационная модель случайного блуждания с устойчивыми шагами. Если фиксировать цену финансового инструмента через определенные равные моменты времени Δt и затем рассмотреть два момента времени t_0 и $t_1 = t_0 + k\Delta t$, то изменение цены за промежуток времени $[t_0, t_1]$ будет равно сумме изменений цены за каждый из интервалов $[t_0, t_0 + \Delta t], \ldots, [t_0 + (k-1)\Delta t, t_1]$, то есть

$$\Delta P = P_{t_1} - P_{t_0} = \sum_{i=1}^{k} \left(P_{t_0 + i\Delta t} - P_{t_0 + (i-1)\Delta t} \right) = \sum_{i=1}^{k} \Delta P_{i\Delta t} \quad . \tag{1}$$

Таким образом, изменение цены представляет собой случайное блуждание.

Случайная величина X распределена по устойчивому закону распределения $S(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ тогда и только тогда, когда для любого целого $n > 1$ существуют константы $c_n > 0$ и $d_n \in R$, такие что

$$X_1 + \cdots + X_n = c_n X + d_n , \tag{2}$$

где $X_1,\ldots,X_n \sim iid S(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, а знак “=” означает равенство по распределению [2].

В явном виде существует только характеристическая функция, которая имеет вид [2]

$$\varphi(u) = E(e^{iuX}) = \begin{cases} e^{-\gamma^\alpha |u|^\alpha \left(1 - i\beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) sign(u)\right) + i\delta u}, & \alpha \neq 1 ; \\ e^{-\gamma |u| \left(1 - i\beta sign(u) \frac{2}{\pi} \log(|u|)\right) + i\delta u}, & \alpha = 1 , \end{cases} \tag{3}$$

где α, β, γ, δ, – параметры устойчивого распределения. Параметр $\alpha \in (0,2)$ называется показателем устойчивости распределения и отвечает за степень тяжести хвостов,

$\beta \in (-1,1)$ называется показателем асимметрии и определяет наклон функции распределения, $\gamma > 0$ и $\delta \in R$ – показатели масштаба и сдвига, соответственно.

Имитационная модель строится путем генерации выборки из устойчивого распределения. Доказано [3], что случайная величина X, такая что

$$X = \begin{cases} \dfrac{S_{\alpha,\beta}\sin\left(\alpha\left(V + B_{\alpha,\beta}\right)\right)}{\cos(V)^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\dfrac{\cos\left(V - \alpha\left(V + B_{\alpha,\beta}\right)\right)}{W}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, & \alpha \neq 1; \\ \dfrac{2}{\pi}\left(\left(\dfrac{\pi}{2} + \beta V\right)\tan(V) - \beta\ln\left(\dfrac{W\cos(V)}{\frac{\pi}{2} + \beta V}\right)\right), & \alpha = 1, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$B_{\alpha,\beta} = \frac{\arctan\left(\beta\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)}{\alpha}, \qquad S_{\alpha,\beta} = \left(1 + \beta^2\tan^2\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2\alpha}},$$

$$V \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \qquad W \sim Exp(1),$$

распределена по устойчивому закону с параметрами α, β,1,0.

Тогда можно получить случайную выборку с любым допустимым значением параметров:

$$Y = \begin{cases} \gamma X + \delta, & \alpha \neq 1; \\ \gamma X + \dfrac{2}{\pi}\beta\gamma\ln(\gamma) + \delta, & \alpha = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Проверка адекватности имитационной модели. Случайное блуждание является чисто стохастической моделью, поэтому на практике ее разумно применять для получения интервальных прогнозов. В силу данного факта модель использовалась для оценки процентного обеспечения под биржевой инструмент, покрывающего возможное будущее падение цены с вероятностью 0,99. Для проверки адекватности имитационной модели использовались следующие данные (табл. 1):

Таблица 1

Тип биржевого инструмента	Название финансового инструмента	Обучающая выборка	Контролирующая выборка	Источник
Акция	GMKN, SNGS, LKOH	2000–008	2009–2010	www.finam.ru
Облигация	US Treasury Bonds 5 & 30			www.finance.yahoo.com
Валюта	EUR/GBP, EUR/JPY, EUR/USD	2001–008		www.finam.ru

Алгоритм проверки адекватности имитационной модели реализован в MATLAB:
1. Выбирается определенный временной интервал.

2. По выборке оцениваются параметры устойчивого и нормального распределений для дневных колебаний цен.

3. Проводится имитационный эксперимент:

а) генерируются выборки из нормального и устойчивого законов распределения объемом 100 000 ед.каждая;

б) вычисляются эмпирические квантили обоих распределений для уровня значимости α = ,01;

в) полученные квантили сравниваются с реальным изменением цены за период.

4. Обучающая выборка увеличивается на одно наблюдение, параметры переоцениваются, и происходит возврат к пункту 2.

Параметры оценивались по дневным пикам по обучающей выборке (табл. 2). Оценка осуществлялась с использованием регрессионного метода Koutrouvelis [4].

Таблица 2

Тип инструмента	α	β	γ	δ
GMKN	1,0863	-0,065	27,9161	-9,3454
SNGS	1,4361	0,0155	0,2714	0,0083
LKOH	1,1783	-0,0435	10,1449	-0,5034
EUR/GBP	1,5230	0,1619	0,0015	0,0002
EUR/JPY	1,3872	-0,2168	0,3676	-0,0361
EUR/USD	1,3499	0,0024	0,0030	0,0003
USTB 5	1,7849	0,1729	0,0425	-0,0016
USTB 30	1,8639	0,3240	0,0334	-0,001

Полученные оценки наиболее устойчивы, если проводить переоценку параметров путем увеличения выборки на каждом шаге.

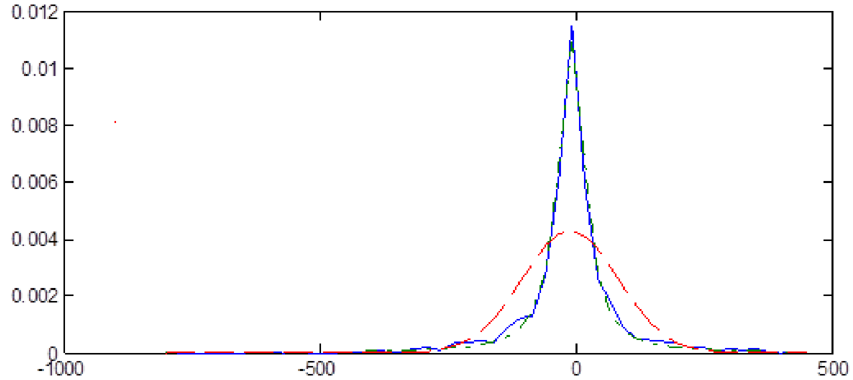

Рис. 3. Эмпирическая и теоретические функции плотности распределения

На рис. 1. представлена аппроксимация эмпирической функции плотности распределения дневных изменений цен GMKN устойчивым и нормальным законами. Штрихпунктирная линия соответствует теоретической плотности распределения устойчивого закона с оцененными параметрами, пунктирная линия – теоретической плотности распределения нормального закона с оцененными параметрами, сплошная линия – эмпирической плотности распределения. Из приведенного рисунка видно, что устойчивое распределение намного качественнее описывает дневное изменение цен акций по сравнению с традиционно применяемым нормальным распределением.

Имитация динамики изменения цен GMKN на основе разработанной модели для различных временных интервалов на контролирующей выборке представлена на рис. 2, 3. Точками на рисунках представлены эмпирические изменения цены за рассматриваемый интервал. Нижняя осциллирующая линия – квантиль устойчивого распределения для уровня $\alpha = 0{,}01$. Сплошная линия в центре рисунка соответствует 0,01 квантили нормального распределения**.**

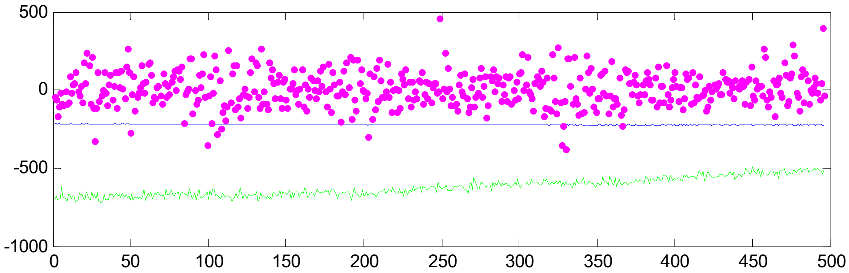

Рис. 4. Дневной интервал для GMKN

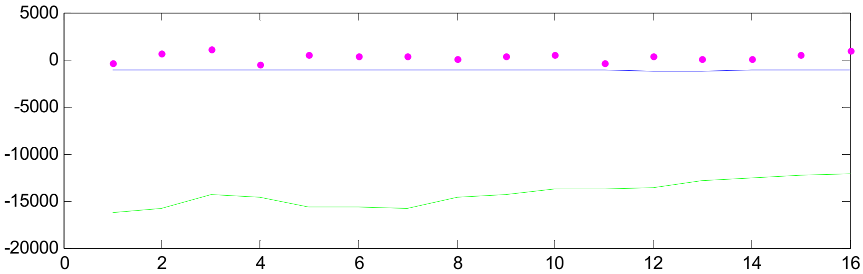

Рис. 3. Месячный интервал для GMKN

Из приведенных графиков видно, что для месячных данных реальные значения не опускаются ниже линии квантили как для устойчивого, так и для нормального распределения. Таким образом, для больших интервалов прогнозирования как устойчивые, так и нормальные распределения очень хорошо оценивают масштабы возможного падения цен. Однако в случае месячного интервала размеры резервов могут быть рассчитаны и без использования имитационной модели случайного блуждания, так как они составляют чуть менее чем 100% стоимости самого финансового инструмента. Поэтому далее рассматривались только дневные интервалы времени.

Размер процентного обеспечения под каждую акцию (рис. 4) в начале 2009 года, согласно имитационной модели, был порядка 60%, однако к концу 2010 года снизился в среднем до 10–15%, что является приемлемым результатом для использования на практике.

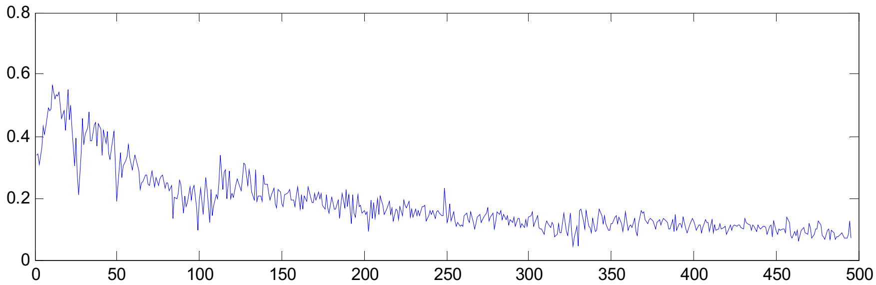

Рис. 4. Обеспечение акций GMKN в процентах от цены

Результаты по всем инструментам сгруппированы в табл.3

Таблица 3

Тип инструмента	Эмпирическая вероятность падения цены для нормального распределения	Эмпирическая вероятность падения цены для устойчивого распределения
GMKN	0,0202	0
SNGS	0,0121	0,002
LKOH	0,0202	0
EUR/GBP	0,0508	0,0261
EUR/JPY	0,0398	0,0027
EUR/USD	0,0413	0
USTB 5	0,008	0,008
USTB 30	0,0339	0,0359

Анализ результатов показывает, что для всех рассмотренных инструментов вероятности падения цен достаточно малы. Величина дневного резерва составляет в среднем не более 30% от стоимости финансового инструмента. Кроме того, резерв, рассчитанный с использованием устойчивого распределения, при тестировании на всех трех типах финансовых инструментов показал лучшие результаты, чем нормальное распределение. Устойчивое распределение переоценило вероятность падения в случае с двумя финансовыми инструментами из изучаемых восьми, в то время как нормальное в семи из восьми случаев дало неверный результат. Если учесть тот факт, что нормальное распределение есть устойчивое с параметрами $\alpha = 2, \beta = 0, \gamma, \delta$, то можно объяснить недооценку вероятности падения цены в двух случаях с устойчивым распределением его близостью к нормальному.

Выводы

1. Для больших интервалов времени прогнозирования имитационная модель в одинаковой степени дает хорошие результаты, как с нормальным, так и с устойчивым распределением, однако ее применение нецелесообразно, поскольку оценки возможного падения цены могут быть получены аналитически.

2. Для коротких временных интервалов имитационную модель рекомендуется использовать при малом значении параметра α , когда устойчивое распределение далеко от нормального.

3. При соблюдении рекомендации имитационная модель подходит для оценки резерва для любого типа биржевых инструментов: акций, облигаций, валюты.

Литература

1. **Трегуб И. В**. Имитационное моделирование. М.: изд-во Финакадемии, 2007.
2. **Nolan J.** Stable Distributions, Models for Heavy Tailed Data, Birkhauser, 2010.
3. **Weron R.** On the Chambers-Mallows-Stuck Method for Simulating Skewed Stable Random Variables, Statistics & Probability Letters 28(1996). P. 165–171.
4. **Weron R.** Performance of the Estimators of Stable Law Parameters, HSC, Research Report HSC/95/1.