ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Г. А. Буров (Рига)

Проблема повышения точности вычислительных алгоритмов идентификации динамических процессов имеет важное значение, поскольку они используется во многих практических приложениях, в частности, для контроля и диагностирования состояния технического оборудования. Однако традиционные алгоритмы, основанные на использовании рекуррентной процедуры исключения неизвестных по методу Гаусса [18, 20], теряют свою работоспособность при решении плохо обусловленных систем разностных уравнений идентификации. Поэтому возникает практическая необходимость создания нового алгоритма без использования рекуррентных процедур и операций деления на малые числа [2, 3]. Задача состоит в создании модели алгоритма и получении ее аналитического описания, в котором была бы указана связь решения системы с исходными данными задачи. Это позволило бы реализовать процедуры имитационного моделирования алгоритма [4, 7, 8] для проверки его работоспособности перед практическим применением. Это важно в задачах обработки полетной информации по соображениям безопасности полета [5, 6].

Указанная задача никем не решалась, поскольку не существует методов нахождения аналитических выражений для обратной матрицы. Рассмотрим систему уравнений

$$Y \cdot \bar{\xi} = \bar{y}, \tag{1}$$

в которой матрица Y и вектор $\bar{y}$ формируются из дискретных измерений динамического процесса:

$$\begin{aligned} &y(t_0 + iT) = \sum_{k=1}^{m} A_k \cdot exp(-b_k\,(t_0 + iT)) = \sum_{k=1}^{m} C_k \cdot q_k{}^{i}; \\ &q_k = exp(-b_k \cdot T); \quad C_k = A_k \cdot exp(-b_k \cdot t_0); \end{aligned} \tag{2}$$

$$D(z) = R(z) / \prod_{k=1}^{n} (z - q_k) \Rightarrow R(z)/(z^n + \xi_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \xi_0),$$

где $\bar{\xi}$ – вектор коэффициентов полинома-знаменателя дискретного оператора, который связан с аналоговым оператором-эквивалентом [9] дифференциального уравнения объекта $W(p) = A(p) / \prod_{k}^{n} (p + b_k)$. Вектор $\bar{\xi}$ несет информацию о состоянии технического объекта, так как существует связь дискретных полюсов $D(z)$ и аналоговых $W(p)$: $q_i = \exp(-b_i \cdot T)$. Элементы Y и $\bar{y}$ в формуле (1) формируются из равенства (2) по правилу

$$[Y]_{r,L} = \sum_{k=1}^{m} C_k \cdot q_k{}^{r+L}, \tag{3}$$

т. е. Y имеет теплицев характер и потому всегда плохо обусловлена [15, 16].

Поэтому применение традиционных вычислительных алгоритмов с рекуррентными процедурами и с применением в них операций деления на малые числа дает оценки $\bar{\xi}$ с большими погрешностями. Поскольку вырожденные ситуации в них возникают непрогнозируемым образом, целесообразно разработать и применять более вычислительно устойчивые алгоритмы. Рассмотрим алгоритм, свободный от этих недостатков. В нем элементы обратной матрицы вычисляются через миноры прямой матрицы [18]:

$$Minr_{ji} = \sum_{P} (-1)^m \cdot (Y_{1\alpha_1} \cdot Y_{2\alpha_2} \cdot, \dots \cdot Y_{n\alpha_n}). \tag{4}$$

Это детерминант подматрицы $H_{i,j} \in Y$, оставшейся в Y после вычеркивания i-строки и i-го столбца, поэтому $H_{i,\,j}$ можно представить в виде индексной матричной сетки совокупностью номеров строк и столбцов, оставшихся после вычеркивания:

$$H_{i,j} \Rightarrow ims\left[(\overline{1.n})/i);(\overline{1.n})/j)\right] \tag{5}$$

В равенстве (4) используется сумма произведений всевозможных перестановок [21] выражений (3). В общем случае в буквенном виде ее найти невозможно, поэтому такой алгоритм до настоящего времени никем не применялся. Однако задачу нахождения аналитического выражения можно решить, применяя символьный метод. Известно, что решать дифференциальные уравнения, применяя символьные изображения Лапласа, значительно легче.

В [11] была разработана символьная комбинаторная (СК) модель для реализации алгоритма (4) в форме ветвящегося графа [19]:

$$\begin{gathered}\varphi Gr * (n,\bar{\nu}) \Rightarrow \left[\varphi KC(\nu_1) * (\overline{1.n})\right] \times \circ \left[\varphi KC(\nu_1) * (\overline{1.n}) / \tilde{a}_1\right] \times \circ \\ \times \circ \left[\varphi KC(\nu_1) * (\overline{1.n}) / \tilde{a}_{12}\right] \dots \times \circ \left[\varphi KC(\nu_1) * (\overline{1.n}) / \tilde{a}_{12.....n-1}\right] \\ \bar{\nu}^T = \left[\nu_1\, \nu_2 \dots \nu_k\right]; \quad \sum_{i=1}^{k} \nu_i = n. \end{gathered} \tag{6}$$

В модели используются принципы имитации: элементы $H_{i,\,j}$ заменяются элементами ее изображения (5), так что формирование аналитического выражения алгоритма переносится в область целых положительных чисел, локальных адресов размещения дискретных значений динамического процесса (2). Поэтому нахождение перестановок (4) сводится к перестановкам элементов в компонентах, составленных из целых чисел, что значительно упрощает задачу. Эти перестановки в графе представлены как компоненты в ветвях графа. Они удовлетворяют требованиям правила раскрытия минора: в них нет повторяющихся элементов, в множестве ветвей нет одинаковых компонент. Ветвям графа присвоены знаки в соответствии с правилом (4). Это, как показано в [7, 8], придает графу свойство фильтрации: на выход графа не проходят компоненты, в которых встречаются одинаковые элементы. Доказано, что сечения графа формируются из упорядоченных числовых последовательностей [9, 10], компоненты которых это – сочетания, генерируемые комбинаторными операторами[21] $\varphi KC(\nu_i) * [(\overline{1.n}) / \tilde{a}_{i-1}]$ из разностных множеств, оставшихся после формирования предыдущих сечений. Поэтому процедура формирования перестановок детерминирована и в ней не применяются методы перебора или какие-либо модификации метода Монте-Карло. Граф реализует методы нахождения детерминанта матрицы для различных вариантов ее разбиения на полосы из строк или столбцов. Ширина сечения графа совпадает с шириной полосы разбиения и задается параметром ν_i, выполняется условие $(\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_m) = n$, n – размерность матрицы. Алгоритм из теоремы Лапласа [15, стр. 30] представляет собой частный случай, графа (6) из двух сечений. Реальный алгоритм находится отображением (6) в область арифметических операций, где индексыадреса заменяются измерениями (2), находятся произведения элементов в каждой ветви и результаты суммируются по всем ветвям. Эти операции указаны в формуле (4) и условно указаны в операторе φDet, так что можно записать

$$Minr_{ji} \Rightarrow \varphi Det * H_{i,j} \Rightarrow \varphi Det * \left[\varphi Graf(n,\bar{\nu}) * (\overline{1.n})\right]. \qquad (7)$$

Сложность вычислительного алгоритма может быть минимизирована на уровне его изображения (6). Произведения результатов измерений процесса (2) в ветвях графа могут быть выражены в символьном виде [7, 11]:

$$\prod_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} C_k \cdot q_k^m \Rightarrow (\overline{1.m})^n \Rightarrow \sum_{i=1} \varphi Arang(\widetilde{\theta}_i) * \left[\varphi KC(\nu_i) * (\overline{1.m})\right]\widetilde{\theta}_i = \varphi Perm * \left[\varphi Part(\nu_i) * n\right], \qquad (8)$$

где m – число слагаемых в выражении (2), n – размерность матрицы H (5). Здесь использованы оператор разбиения числа n на ν_i частей $[\varphi Part(\nu_i) * n]$ оператор $(\varphi Perm*)$, создающий перестановки из разбиений [21], и оператор их размещения $\left[\varphi Arang(k) * q_i \Rightarrow q_i^{(k)}\right]$ в качестве степеней дискретных полюсов. Поскольку компоненты, имеющие повторы элементов, на выход модели (6) не пройдут в результате фильтрации, останется только часть компонент из формулы (8):

$$\varphi Det * \varphi Gr * (\overline{1.m})^n \Rightarrow \left[\varphi KC(n) * (\overline{1.m})\right] \Rightarrow \varphi KC(n) * (q_1; q_2; \cdots q_m). \qquad (9)$$

Только она войдет в аналитическое описание. На компонентах (9) следует разметить степени над дискретными полюсами. Из равенства (3) видно, что они определяются элементами из выражения (5). Поэтому при прохождении компонент (9) через ветви графа над их элементами размещаются в качестве степеней компоненты этих ветвей. В итоге на выходе (6) получим группы $(-1)^{Z_i}\left\{\widetilde{q}_i^{\,Z_i}\right\}$, которые дадут функции

$$Fg(\widetilde{q}_i^{\,(n)}) \Rightarrow (q_1 - q_2)\cdot(q_1 - q_3)\cdot\cdots\cdot(q_n - q_{n-1}), \qquad (10)$$

равные значениям определителей Вандермонда. В работах [7, 8] показано, что при отображении выражения (6) в пространство арифметических операций, из функций (10) формируются диагональные матрицы, а из весовых коэффициентов $C_k = A_k \cdot \exp(-b_k \cdot t_0)$, см. формулу (2), формируется матрица С:

$$Minr_{ji} \Rightarrow \varphi Det * H_{i,j} \Rightarrow Dg\left[Fg(\widetilde{q}_i^{\,(n)}), \bar{r}_i\right]\cdot[C]\cdot Dg\left[Fg(\widetilde{q}_i^{\,(n)}), \bar{L}_{ij}\right] \qquad (11)$$

Диагональные матрицы порознь соотносятся к векторам номеров строк и столбцов, указанным в (5). Это важное свойство уменьшает сложность алгоритма и его аналитического описания. Оно было использовано в работе [13] при вычислении обратной матрицы Гильберта[16, 17] – $[G]_{i,j} = 1/(i+j)$ 20-го порядка, которая была найдена со 100%-ной точностью, хотя ранее считалось, что выше 10-го порядка определить ее с приемлемой точностью невозможно даже при использовании суперкомпьютеров.

Выводы

Применение принципов имитации (операции с буквенными формулами заменяются операциями с упорядоченными числовыми последовательностями) позволило формировать вычислительные алгоритмы и их аналитические описания в символьном пространстве целых положительных чисел. Доказано, что в символьном пространстве могут быть применены эффективные методы понижения сложности алгоритмов и их аналитических описаний. На основе СК-моделей могут быть созданы устойчивые вычислительные алгоритмы, позволяющие предотвратить возникновение вырожденных ситуаций в процедурах идентификации. Полученные аналитические описания алгоритмов могут быть использованы в процедурах имитационного моделирования для проверки их работоспособности перед практическим применением. Впервые было получено аналитическое описание обратной матрицы идентификации, в котором ее элементы были представлены в явном виде как функции параметров обрабатываемого дискретного динамического процесса и его периода квантования *T*. Метод позволил получить математически формализованное описание алгоритма с параллельной архитектурой, что дает возможность увеличить быстродействие алгоритмов идентификации и их регулярные свойства. Полученное аналитическое выражение доказывает, что вычисления в процедурах идентификации производятся в области малых чисел, так как в него входят произведения разностей дискретных полюсов объекта, которые всегда меньше единицы. Это означает, что влияние шумов велико и поэтому сформировать достоверные матрицы Гессе из вторых производных функционала невязки уравнений – нереально, и метод градиента, применяемый в стохастических моделях идентификации [14], не приводит к оптимальным оценкам. Варьирование с различными законами распределения шумов не может улучшить ситуацию и имеет чисто умозрительный характер.

Литература

1. **Буров Г.** Символьные комбинаторные модели в задачах идентификации аналоговых технических объектов // Сб. статей 11-q Международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности. Т. 3 СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2011.
2. **Буров Г.** Символьное комбинаторное исчисление и его применения в задачах линейной алгебры и идентификации динамических систем // Латвийский математический ежегодник. Рига: Зинатне, 1993. Nr. 34.
3. **Буров Г.** Методы исчисления дискретных комбинаторных конфигураций и их применение в моделях контроля и идентификации // 9-й симпозиум по проблеме избыточности в информационных системах. Л., изд-во АН СССР, 1986.
4. **Burov G.** Numerically stable symbolical combinatory model of polynomial approximation for problems of identification and imitation modeling // Datorzinātne Computer Science. 2008. Vol. 50.
5. **Burov G.** Information technologies for increasing the usability of algorithms used during aircraft flight test stage. 2009. Vol. 39.
6. **Burov G.** Principles of automation of identification processes of aerospace object characteristics at the flight test stage. 2009. Vol. 41.
7. **Burov G.** Symbolical combinatory model for solving the problem of eigenvalues in tasks of identification of dynamic objects. 2008. Vol. 33.
8. **Burov G.** Symbolical combinatory model of parallel algorithm of identification using the method of least squares. 2008. Vol. 50.
9. **Grundspenkis J., Burov G.** Topological associative models signal processing. 2002.
10. **Burov G.** Parallel architecture of algorithms of dynamic objects identification. 2003.
11. **Burov G.** Combinatorial methods of formation of parallel algorithms of the signals processing. 2002.
12. **Burov G.** Formation of computing algorithms on the basis of graph address structures //. Applied Computer Systems. 2004. 6 issue.
13. **Burov G.** Combinatory models of inversion of special type matrixes. 2005. Vol. 47
14. **Льюнг Л.** Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука. 1991.

15. **Воеводин В., Кузнецов Ю.** Вычисления и матрицы. М.: Наука. 1984.
16. **Форсайт Д.** Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. М.: Мир. 1969.
17. **Райс Д.** Матричные вычисления и математическое обеспечение. М.: Мир. 1984.
18. **Фаддеев Д., Фаддеева В.** Вычислительные методы линейной алгебры. М., 1969.
19. Лекции по теории графов. ФМ. М.: Наука. 1990.
20. **Демидович Б., Марон И.** Основы вычислительной математики. М., 1963.
21. **Калужнин Л., Сущанский В.** Преобразования и перестановки. М.: Наука. 1979.
22. **Эйкхофф П.** Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975.