

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЛАВ ДЛЯ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОЛУМАРКОВСКИХ СИСТЕМ

А.Н. Горин, Л.Б. Афанасьевский, М.А. Чурсин (Воронеж)

Введение

При разработке и исследовании сложных систем с дискретными состояниями достаточно широко используются аналитические полумарковские модели их функционирования, например [1, 2], при этом одним из результатов моделирования являются оценки вероятностей нахождения системы в различных состояниях (вероятностей состояний) в установившемся режиме.

Определение стационарных вероятностей состояний для полумарковских процессов представляет собой достаточно сложную вычислительную задачу [3–6], сводящуюся к многоэтапным расчетам. Кроме того, сами результаты могут содержать погрешности, как из-за сложностей моделей, так и применения численных методов для получения оценок вероятностей.

Подтвердить результаты, полученные с использованием аналитических моделей, можно с помощью имитационных моделей [7], позволяющих учесть нюансы функционирования систем. Имитационное моделирование может быть использовано и как основной инструмент при исследовании сложных систем [8, 9].

Следует отметить, что при имитационном моделировании широко используется вычислительная система Matlab [2, 7]. Применение Matlab обусловлено наличием функций для генерирования случайных величин, подчиненных различным законам распределения, простотой работы с матрицами и представления результатов в графическом виде, наличием мощного встроенного языка программирования.

Постановка задачи

Ставится задача разработки имитационных моделей сложных систем с дискретными состояниями для случая, когда случайные процессы, протекающие в системе, являются полумарковскими. Результатом работы модели должны быть оценки стационарных вероятностей состояний системы. В основу построения моделей положены следующие положения, которые позволяют считать системы полумарковскими:

1) изменение состояний систем происходит случайным образом, т. е. системы являются стохастическими;

2) изменение состояний и времени нахождения системы в состояниях после переходов осуществляются двумя независимыми внешними множествами потоков с произвольными распределениями вероятностей;

3) статистические свойства процессов, изменяющих состояния и определяющих время пребывания системы в состояниях, не зависят от числа уже сделанных переходов (системы являются однородными) и от способа попадания системы в каждое из возможных состояний;

4) изменение состояний системы происходит мгновенно.

При разработке моделей должна быть реализована возможность уменьшения разброса вероятностей состояний, обусловленного стохастическим характером имитационной модели, до практически приемлемого уровня путем использования соответствующих методов обработки измерений.

На этапе разработки моделей должна быть подтверждена их правильность путем сравнения результатов с результатами, полученными другими методами.

Дальнейшее изложение соответствует результатам, полученным в [10].

Аналитический метод расчета полумарковской системы

Имитационную модель будем считать корректной, если оценки вероятностей, полученные на имитационной модели, с приемлемой точностью будут совпадать с оценками, полученными аналитическим методом.

В рассматриваемой постановке задачи полумарковский процесс является двумерным. Процесс, изменяющий состояния, является вложенным по отношению к процессу, формирующему время нахождения системы в состояниях.

Для двумерного процесса процедура определения стационарных вероятностей состояний состоит в проведении многоэтапных расчетов.

Стационарные вероятности полумарковского процесса определяются по формуле [3]

$$p_j = \frac{a_j m_j}{\sum_{i=1}^n a_i m_i}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где $a_j, j = 1, 2, \dots, n$ – стационарные вероятности состояний вложенного процесса;

$m_i, i = 1, 2, \dots, n$ – среднее время пребывания в i -ом состоянии при произвольном распределении вероятностей.

Среднее время пребывания процесса в i -ом состоянии определяется по формуле

$$m_i = \sum_{k=1}^n q_{ik} \int_0^{\infty} t f_{ik}(t) dt, \quad (2)$$

где n – число состояний; $f_{ij}(t)$ – плотность вероятности для случайного времени пребывания процесса в i -ом состоянии, если следующий переход будет в состояние j ; $q_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$ – переходные вероятности в стационарном режиме, вычисляемые по формуле [6]

$$q_{ij} = \int_0^{\infty} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (1 - F_{ik}(t)) dF_{ij}(t), \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

В формуле (3) $F_{ij}(t), i, j = 1, 2, \dots, n$ – функции распределения для потоков событий, определяющих время пребывания системы в i -ом состоянии, если следующий переход будет выполнен в состояние j .

Стационарные вероятности для вложенного процесса вычисляются из системы линейных уравнений

$$a_i = \sum_{j=1}^n a_j q_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

в которых одно из уравнений заменяется условием нормировки

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1.$$

Приведенные формулы (1)-(4) позволяют сделать следующие выводы:

- оценки стационарных вероятностей можно получить только численными методами;
- в расчетных соотношениях в явном виде должны использоваться формулы для плотностей вероятностей и функций распределения;
- расчетные соотношения неудобны для программирования и сложны при проведении практических расчетов;
- сложно получить зависимости вероятностей состояний от параметров распределений.

Эти сложности в значительной степени исчезают при использовании имитационных моделей.

Имитационное моделирование двумерных полумарковских процессов

Имитационная модель, по сути, представляет собой самостоятельный объект (систему), на котором проводятся статистические испытания. Каждое испытание представляет собой одну *реализацию* модели при некоторых значениях параметров. В результате испытания система переходит в некоторое другое состояние и остается в нем в течение случайного времени.

Проведя достаточно большое число испытаний N и подсчитав суммарное время T_{sost_i} , $i = 1, 2, \dots, n$ нахождения системы в состоянии S_i и общее время нахождения во всех состояниях T_s , искомые вероятности можно определить по формуле

$$P_i = \frac{T_{sost_i}}{T_s}. \quad (5)$$

Естественно, имитационная модель должна объединять в себе наиболее существенные свойства реального объекта.

Построим имитационную модель функционирования систем, в которых состояния изменяются мгновенно, при этом моменты смены состояний задаются непрерывными функциями времени (плотностями вероятностей), вид и параметры которых зависят от направлений переходов из состояний. Кроме того, система после перехода в некоторое состояние остается в нем в течение некоторого случайного времени, также зависящего от направления перехода. Разработку будем вести в среде Matlab, вид плотностей вероятностей и функций распределения будет ориентирован на эту среду.

Модель такой системы представляет собой двумерный полумарковский процесс [3, 4, 6]. В этом двумерном процессе переход в новое состояние осуществляется вложенным полумарковским процессом.

Алгоритм имитационной модели включает в себя следующие операции:

- определение номера k исходного состояния по известным начальным вероятностям состояний $P_i(0)$, $i = 1, 2, \dots, n$;
- организацию большого числа N испытаний модели, при этом для каждого испытания определяется, в какое состояние должна перейти система.

После завершения N испытаний вычисляются оценки стационарных вероятностей в соответствии с формулой (5).

Номер начального состояния k определяется путем «розыгрыша» следующим кодом

```
s=p(1); k=1;
gg=rand; %Получение случайного числа, равномерно
%распределенного в [0;1]
while (gg>s),k=k+1;s=s+p(k),
```

где p – одномерный массив начальных вероятностей состояний.

Процедура выбора состояния, в которое должна перейти система из текущего состояния, следующая:

– генерируются случайные числа в соответствии с плотностями вероятностей для всех потоков, переводящих систему из текущего состояния в другие возможные состояния;

– выбирается минимальное случайное число, соответствующее наступлению ближайшего события, и фиксируется номер состояния, в которое должна перейти система.

Далее в зависимости от того, в какое состояние должна перейти система, формируется с учетом соответствующей плотности вероятности случайное значение времени нахождения системы в текущем состоянии.

Основная часть имитационной модели на языке Matlab имеет вид

```
for i=1:N, %Цикл по количеству смен состояний
    %Формирование моментов смен состояний
    if(upr==0),
        for m=1:n,sl(m)=0;
            if(ff(ktek,m)~=0),sl(m)=random('exp',ff(ktek,m));end
        end
    end
    if(upr==1),
        for m=1:n,sl(m)=0;
            if((vf(ktek,m)~=0) && (vf(ktek,m)==1))
                sl(m)=random('exp',param1(ktek,m));
            end
            if((vf(ktek,m)~=0) && (vf(ktek,m)==2))
                sl(m)=random('rayl',param1(ktek,m));
            end
            if((vf(ktek,m)~=0) && (vf(ktek,m)==3))
                sl(m)=random('wbl',param1(ktek,m),param2(ktek,m));
            end
            if((vf(ktek,m)~=0) && (vf(ktek,m)==4))
                sl(m)=random('gam',param1(ktek,m),param2(ktek,m));
            end
        end
    end
    %Определение наиболее раннего события
    mint=nval;
    for m=1:n,
        if((m == ktek) && (sl(m)< mint) && (sl(m)~=0)),
            mint=sl(m);knew=m; %knew - номер состояния,
            %в которое должна перейти система
        end
    end
end
```

```

    %Формирование значения времени нахождения системы
    %в состоянии до перехода
    if (vf1(ktek,knew)==1)
        ssl=random('exp',param11(ktek,knew));
    end
    if (vf1(ktek,knew)==2)
        ssl=random('rayl',param11(ktek,knew));
    end
    if (vf1(ktek,knew)==3)
        ssl=random('wbl',param11(ktek,knew),param21(ktek,knew));
    end
    if (vf1(ktek,knew)==4)
        ssl=random('gam',param11(ktek,knew),param21(ktek,knew));
    end
    Ttek=ssl; %Время нахождения системы в состоянии до перехода
    Tsost(ktek)=Tsost(ktek)+Ttek; %Суммарное время нахождения
    % системы в состоянии
    count(ktek)=count(ktek)+1;
    ktek=knew;%ktek - номер текущего состояния системы
end

```

Управляющий параметр upr задает режим работы модели. При $upr = 0$ смена состояний осуществляется непрерывной марковской цепью, при $upr = 1$ – полумарковским потоком событий.

В приведенном коде имитационной модели предусмотрено применение четырех наиболее часто используемых распределений: экспоненциального (exp – код 1), Рэлея ($rayl$ – код 2), Вейбулла (wbl – код 3), Гамма-распределения (gam – код 4).

Естественно, что количество видов распределений может быть легко увеличено путем добавления в код соответствующих условных операторов.

В качестве исходных данных для такой модели должны использоваться шесть матриц, если ограничиться двухпараметрическими плотностями вероятностей.

В матрице vf указываются коды вида плотностей вероятностей для каждого варианта перехода из состояния, а в матрицах $param1$ и $param2$ – параметры плотностей вероятностей.

В матрице $vf1$ указываются коды вида плотностей вероятностей для времен нахождения системы в состояниях, а в матрицах $param11$ и $param21$ – параметры плотностей вероятностей.

Генерирование случайных чисел для различных законов распределения в Matlab осуществляется с помощью функции $random$. Обращение к этой функции имеет вид

$$x = random('name', value1 [, value2, \dots]),$$

где

x – случайное число;

$name$ – название закона распределения, принятое в Matlab;

$value1$, $value2$ – значения параметров плотности вероятности.

Оценки вероятностей состояний P_i , $i = 1, 2, \dots, n$ в установившемся режиме вычисляются как отношения времени нахождения системы в конкретных состояниях ко времени нахождения системы во всех состояниях при достаточно большом количестве испытаний модели.

Визуализация результатов моделирования и повышение точности оценок

В Matlab имеются различные средства визуализации результатов расчетов. Исследователь может использовать возможности визуализации для принятия решения о необходимом числе испытаний имитационной модели, необходимости применения

каких-либо методов для обработки результатов моделирования. В имитационной модели можно достаточно легко дополнительно организовать цикл по количеству испытаний (переходов) N и сохранить результаты в двумерном массиве xx .

```

%NN - количество "прогонов" модели
NN=50
for ii=1:NN,
    N=ii*1000
    for i=1:N,
        ...
        for j=1:n,xx(ii,j)=x(j); end
    end
end
end

```

В приведенном коде массив x содержит значения стационарных вероятностей для текущего числа испытаний модели N .

В имитационной модели эмпирические значения вероятностей определяются по формуле (5). Естественно, оценки вероятностей могут считаться относительно достоверными только при больших значениях N . Но даже при больших значениях N будут наблюдаться флуктуации в значениях вероятностей при повторных «прогонах» модели из-за ее стохастического характера.

Сглаживание «зашумленных» измерений может выполняться различными методами, например усреднением оценок вероятностей, полученных по множеству «прогонов» модели при одинаковых количествах переходов между состояниями.

В рассматриваемом случае модель системы представляет собой самостоятельный объект, на котором проводятся статистические эксперименты. Результаты этих экспериментов, полученные на модели при разных значениях переходов N , могут быть использованы для уточнения оценок вероятностей с помощью рекуррентного определения математического ожидания для вероятности j -го состояния.

$$m_j(k) = m_j(k-1) + \frac{1}{k}[x_j(k) - m_j(k-1)], \quad k = 1, 2, \dots, NN, \quad (6)$$

где

NN – количество «прогонов» модели;

m_j – среднее значение параметра x_j ;

$x_j(k)$ – значение параметра x_j при k -ом сеансе моделирования.

Зависимости вероятностей состояний от количества переходов при сглаживании вероятностей с помощью рекуррентного усреднения (6) приведены на рисунке 1.

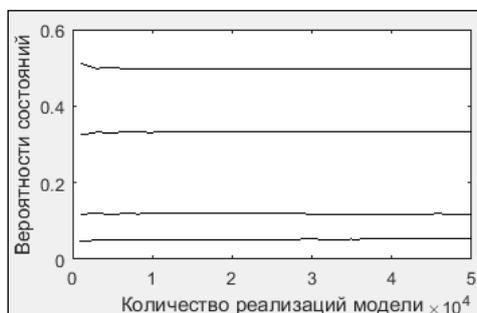


Рис.1 – Зависимости вероятностей состояний от количества переходов при рекуррентном усреднении

Пример использования аналитической и имитационной моделей

В качестве примера системы, описываемой двумерной полумарковской моделью, рассмотрим специальное радиоэлектронное средство (РЭС), поведение которого задано графом, представленным на рисунке 2 [11].

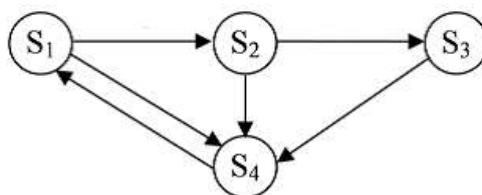


Рис.2 – Граф состояний и переходов РЭС

На рисунке 2 приняты следующие обозначения:

S_1 – РЭС находится в боевой готовности; S_2 – РЭС ведет разведку целей; S_3 – РЭС ведет подавление целей; S_4 – РЭС находится в неисправном состоянии.

Примем, что поведение такой системы описывается двумерной полумарковской моделью. Для подтверждения правильности имитационной модели сравним результаты расчетов по формулам (1)-(4) с результатами имитационного моделирования полумарковского процесса для системы, граф которой изображен на рисунке 2. Исходные данные для моделирования приведены в таблицах 1, 2.

Среднее значение m_x для распределения Рэлея вычисляется по формуле $m_x = b \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, а для распределения Вейбулла – по формуле $m_x = a \Gamma(1+1/b)$, где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция, a – параметр масштабирования, b – параметр формы.

Таблица 1 – Виды и параметры плотностей вероятностей для времени между переходами

Переход между состояниями	Вид и код распределения	Параметры распределения	Среднее значение времени между сменами состояний
1-2	Рэлея – 2	$b = 5$	6,27
1-4	Рэлея – 2	$b = 6$	7,52
2-3	Вейбулла – 3	$a = 2,8; b = 2$	2,48
2-4	Экспоненциальное – 1	$m = 2,5$	2,5
3-4	Экспоненциальное – 1	$m = 2,5$	2,5
4-1	Экспоненциальное – 1	$m = 1,4$	1,4

Таблица 2 – Виды и параметры плотностей вероятностей для времени нахождения системы в состояниях

Переход между состояниями	Вид и код распределения	Параметры распределения	Среднее значение времени нахождения системы в состояниях
1-2	Экспоненциальное – 1	$m = 4$	4
1-4	Экспоненциальное – 1	$m = 3,9$	3,9
2-3	Рэлея – 2	$b = 1,5$	1,88
2-4	Рэлея – 2	$b = 12,5$	15,67
3-4	Экспоненциальное – 1	$m = 2,5$	2,5
4-1	Экспоненциальное – 1	$m = 1,4$	1,4

Стационарные вероятности состояний (psostimits), полученные с помощью имитационной модели, равны

$$NN = 50; \text{psostmods} = [0.336 \quad 0.4929 \quad 0.0528 \quad 0.1183],$$

где NN – число сеансов моделирования с нарастающим количеством переходов при шаге, равном 1000: (1000:1000: $NN*1000$).

Время работы имитационной модели не превышало четырех минут.

Результаты расчетов по формулам (1)-(4) приведены в таблице 3 и с точностью до второго знака после запятой совпадают с результатами имитационного моделирования.

Таблица 3 – Результаты расчетов по аналитическим формулам

Среднее время m_i пребывания в состоянии	Переходные вероятности q_{ij}	Стационарные вероятности для вложенного процесса – a_i	Стационарные вероятности состояний p_i
$m_1 = 3,959$	0 0,59 0 0,41	0,353	0,3352
$m_2 = 9,904$	0 0 0,418 0,582	0,208	0,4941
$m_3 = 2,500$	0 0 0 1	0,087	0,0522
$m_4 = 1,400$	1 0 0 0	0,353	0,1185

Близость значений стационарных вероятностей для обоих видов моделей подтверждает корректность подхода при построении имитационной модели.

Результаты, приведенные в таблице 3, получены в Mathcad.

Аналитические методы определения стационарных вероятностей полумарковских процессов достаточно сложны, поэтому использование имитационных моделей в качестве основного рабочего инструмента в этом случае является оправданным.

Определение характеристик системы на модели

Из рисунка 1 следует, что оценки вероятностей, по сути, являются «точечными», следовательно, имитационные модели можно использовать и для исследования характеристик системы при изменениях ее параметров.

На практике каждое состояние обычно характеризуется некоторым набором параметров. Эти параметры тем или иным образом влияют на параметры плотности вероятности, определяющей либо процесс смены состояний, либо значение времени нахождения системы в состоянии.

В качестве примера на рисунке 3 приведены зависимости вероятностей состояний от параметра масштабирования распределения Рэля для времени нахождения системы в состоянии 2 при переходе в состояние 4 [значения элемент *aparam11* (2, 4)].

Выводы

Разработана имитационная модель, позволяющая:

- упростить подготовку исходных данных для определения стационарных вероятностей состояний по сравнению с аналитическими моделями;
- получить «точечные» оценки вероятностей состояний при использовании рекуррентного усреднения;
- исследовать влияние параметров на значения вероятностей состояний;

- легко получить значения количеств переходов в каждое из состояний и средние значения времени нахождения в состояниях;
- протоколировать процесс смены состояний и визуализировать результаты моделирования за счет возможностей, предоставляемых Matlab.

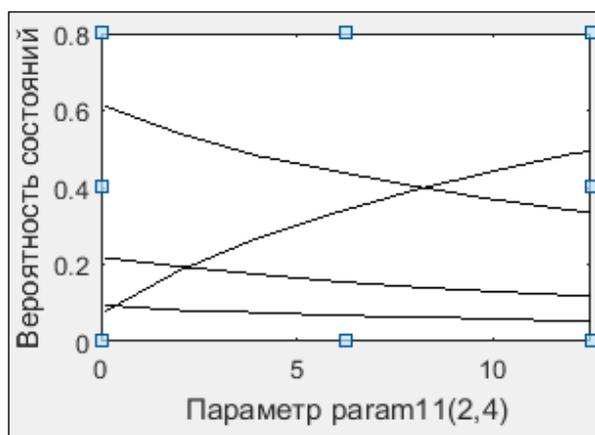


Рис.3 – Зависимости вероятностей состояний от параметра масштабирования распределения Рэля

Кроме того, положительной стороной имитационной модели является ее универсальность. Она может быть легко настроена на исследование систем с любым числом состояний и потоков событий, имеющих произвольные распределения.

Разработанная модель может использоваться как для проведения практических расчетов, так и для проверки корректности аналитических методов расчета.

Литература

1. **Андреещев И.А.** Полумарковская модель оценки надежности функционирования автоматизированной системы управления силами и средствами радиоэлектронной борьбы / И.А. Андреещев, С.А. Будников // Вестник военно-воздушной академии. – 2019. – № 2 (32). – С. 283-288.
2. **Борисевич А.В.** Полумарковская модель для оценки показателей надежности источника бесперебойного питания дата-центра [Электронный ресурс] / А.В. Борисевич, Н.В. Дякин // Современные научные исследования и инновации. – 2015. – № 8. Ч. 1. – Режим доступа: <http://web.snauka.ru/issues/2015/08/57039>. – (Дата обращения: 12.01.2018).
3. **Андронов А.М.** Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / А. М. Андронов, Е. А. Копытов. Л. Я. Гринглаз. СПб.: Питер, 2004. – 461 с.
4. **Тихонов В.И.** Марковские процессы / В. И. Тихонов, М. А. Миронов. – М.: Советское радио, 1977. – 488 с.
5. **Коваленко И.Н.** Полумарковские модели в задачах проектирования систем управления летательными аппаратами / И. Н. Коваленко, Г. К. Москатов, Е. Ю. Барзилович. – М.: Машиностроение, 1973. – 176 с.
6. **Xie W., Hong Y., Trivedi K.** Analysis of a two-level software rejuvenation policy / W. Xie, Y. Hong, K. Trivedi // Reliability Engineering and System Safety, 2005, v. 87. P. 13-22.
7. **Гультяев А.К.** Визуальное моделирование в среде Matlab. – СПб.: Питер, 2000. – 432 с.

-
8. **Афанасьевский Л.Б.** Метод имитационного моделирования как средство анализа стохастических сетевых графиков / Л.Б. Афанасьевский, А.Н. Горин, М.А. Чурсин // Вестник Воронежского гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2015. – № 2. – С. 54-59.
 9. **Афанасьевский Л.Б.** Имитационное моделирование систем, управляемых событиями, в среде MatLab+Simulink / Л.Б. Афанасьевский, А.Н. Горин, А.Г. Фадин // Информатика: проблемы, методология, технологии : сб. тр. XVIII Междунар. науч.-метод. конф. – Том 2 (Воронеж, 15-16 февраля 2018 г.). – Воронеж. Научно-исследовательские публикации, 2018. – С. 46-50.
 10. **Афанасьевский Л.Б.** Имитационное моделирование полумарковских процессов в системах с дискретными состояниями и непрерывным временем / Л.Б. Афанасьевский, А.Н. Горин, М.А. Чурсин // Вестник Воронежского гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2019. – № 3. – С. 42-52.
 11. **Фадин А.Г.** Моделирование радиоэлектронных систем на ЭВМ: учебник / А.Г. Фадин. Воронеж: ВИРЭ, 2000. – 493 с.